

Partiel de mathématiques discrètes, semestre 1, juin 2009.

Durée : 3 heures.

COUCHOT, J.-F.

Les supports de TDs et de TP sont autorisés ; téléphones et calculatrices sont interdits.

Q. 1. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive si $\forall (x, y) \in E^2, (x, y) \in G \text{ et } (y, x) \in G \implies x = y$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 2. Un ordre sur E est dit partiel si, lorsque l'on choisit deux éléments quelconques x et y dans E , alors x est en relation avec y , ou y est en relation avec x . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 3. $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, xy = 1\}$ est une relation fonctionnelle. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 4. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 5. $x\mathcal{R}y \iff$ « x et y ont le même reste dans une division par 2 » est une relation d'équivalence sur les entiers strictement positifs. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 6. $|$ (divisibilité) est une relation d'ordre totale dans \mathbb{N} . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 7. (\mathbb{R}, \leq) est un ensemble ordonné. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 8. Les relations d'équivalence sont les relations réflexive, symétrique et transitive. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 9. $|$ (relation de divisibilité) est une relation d'ordre partiel dans \mathbb{N} .

L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 10. Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné, et A une partie de E . On appelle minorant de A tout élément x de E tel que, quel que soit $a \in A, a\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 11. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite antisymétrique quand tout élément est en relation avec lui-même. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 12. Soit \mathcal{R} une relation binaire. Il est possible d'avoir $x\mathcal{R}y$ sans avoir $y\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 13. Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, alors tout élément de F possède exactement un antécédant dans E . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 14. $|$ est une relation d'ordre dans \mathbb{Z} . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 15. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite symétrique si $\forall (x, y, z) \in E^3, (x, y) \in G \text{ et } (y, z) \in G \implies (x, z) \in G$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 16. « $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\sin(x) = \sin(y)$ » est une relation d'ordre sur l'ensemble des réels. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 17. Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné, et A une partie de E . On appelle majorant de A tout élément x de E tel que, quel que soit $a \in A, a\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 18. Les relations d'équivalence sont les relations réflexive, antisymétrique et transitive. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 19. $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ est surjective. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 20. Un ordre sur E est dit partiel si, lorsque l'on choisit deux éléments quelconques x et y dans E , alors x est en relation avec y , ou y est en relation avec x . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 21. Une application de E dans F est telle que $\forall x \in E$, il existe un unique élément $y \in F$ en relation avec x . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 22. Un ordre est dit total sur E si tous les éléments de E sont comparables entre eux. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 23. Une application est une relation binaire particulière. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 24. Une partie A de E est dite majorée s'il existe une borne supérieure pour A . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 25. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite réflexive si

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 26. Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné. Il peut exister des parties de E qui sont non majorées. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 27. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite antisymétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies x = y$$

L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 28. « $x\mathcal{R}y$ si et seulement si $\sin(x) = \sin(y)$ » est une relation d'équivalence sur l'ensemble des réels. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 29. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite antisymétrique si, lorsque x est en relation avec y , alors y ne peut pas être en relation avec x (sauf si $x = y$). L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 30. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite symétrique si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x \implies x = y$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 31. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite réflexive si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 32. L'égalité de deux entiers est une relation d'équivalence. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 33. Si $f : E \rightarrow F$ est bijective, alors tout élément de E possède exactement une image dans F . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 34. \leq est une relation d'ordre total dans \mathbb{R} . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 35. Les relations d'ordre sont les relations réflexive, antisymétrique et transitive. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

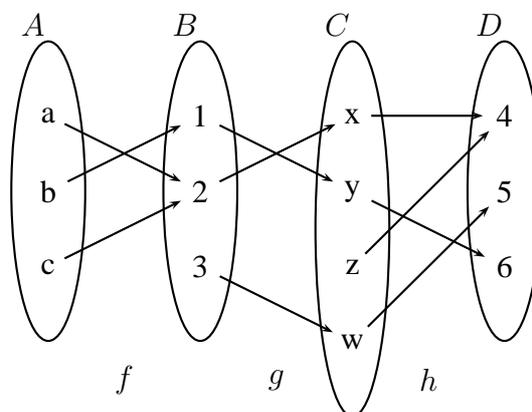
Q. 36. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive si $\forall (x, y) \in E^2, (x, y) \in G \text{ et } (y, x) \in G \implies x = y$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 37. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est injective. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 38. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite antisymétrique si, lorsque x est en relation avec y , alors y est en relation avec x . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 39. Une partie A de E est dite majorée s'il existe un minorant pour A . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 40. Etant données les fonctions $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$ définies par le diagramme suivant



$h \circ g$ est-elle surjective ?

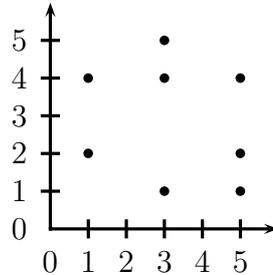
Q. 41. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite antisymétrique si $\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 42. $(\mathcal{P}(E), \subset)$ est un ensemble ordonné. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 43. $(\mathbb{Z}, |)$ est un ensemble ordonné. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 44. Soit R la relation dans $A = \{1, 2, 3, 4\}$ définie par $R = \{(1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4), \}$. A-t-on $R \circ R = \{(1, 3) \times (1, 3), (1, 3) \times (1, 4), (1, 3) \times (3, 2), \dots, (3, 3) \times (3, 4), (3, 4) \times (3, 4)\}$?

Q. 45. Etant donnée la relation \mathcal{R} dans $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par les points figurant dans le diagramme cartésien :



Le domaine de \mathcal{R} est-il $\{1, 2, 4, 5\}$?

Q. 46. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive lorsque, si x est en relation avec y , et si y l'est avec z , alors x est en relation avec z . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 47. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite symétrique si

$$\forall (x, y) \in E^2, x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$$

L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 48. Si $f : E \longrightarrow F$ est bijective, alors tout élément de F possède exactement un antécédant dans E . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 49. Soit (E, \mathcal{R}) un ensemble ordonné, et A une partie de E . On appelle minimum de A tout élément x de E tel que, quel que soit $a \in A, a\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 50. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite antisymétrique si

$$\forall (x, y, z) \in E^3, (x, y) \in G \text{ et } (y, z) \in G \implies (x, z) \in G$$

L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 51. Une partie A peut être non majorée, mais admettre quand même un élément maximum. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 52. Un ordre est dit partiel sur E si tous les éléments de E sont comparables entre eux. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 53. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive si, lorsque x est en relation avec y , alors y est en relation avec x . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

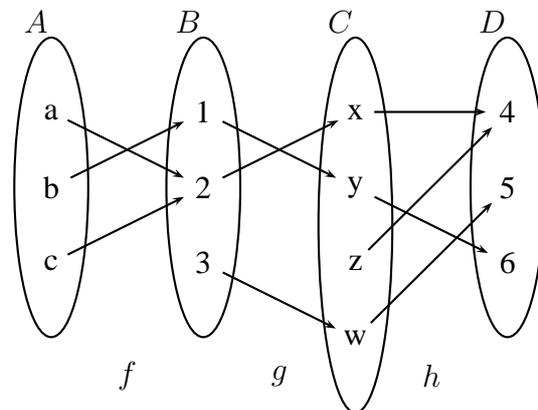
Q. 54. Une application injective est une application telle que tout élément de l'ensemble de départ possède au plus une image. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 55. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive si, lorsque x est en relation avec y , alors y ne peut pas être en relation avec x (sauf si $x = y$). L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 56. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite symétrique si, lorsque x est en relation avec y , alors y est en relation avec x . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 57. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite réflexive si, lorsque x est en relation avec y , alors y ne peut pas être en relation avec x (sauf si $x = y$). L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

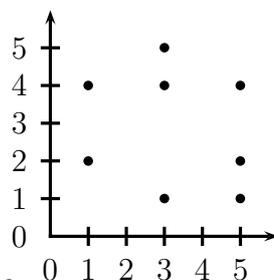
Q. 58. Etant données les fonctions $f : A \rightarrow B, : g : B \rightarrow C$ et $h : C \rightarrow D$ définies par le diagramme suivant



On ne peut pas déduire du schéma des propriétés de $h \circ h$.

Q. 59. Dans une algèbre de Boole munie des opérateurs classiques $+$, \cdot et $-$, on considère l'expression $E = \bar{a}(a + b)(a + c)(a + d)(a + e)$. La version la plus réduite de E est $\bar{a}bcde$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 60. Etant donnée la relation \mathcal{R} dans $C = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ définie par les points figurant dans le diagramme cartésien :



Le domaine de \mathcal{R} est-il $\{1, 2, 3, 4, 5\}$?

Q. 61. $\sin : \mathbb{R} \rightarrow [-1, 1]$ est surjective. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 62. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive quand tout élément est en relation avec lui-même. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 63. $\sqrt{\cdot} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est surjective. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

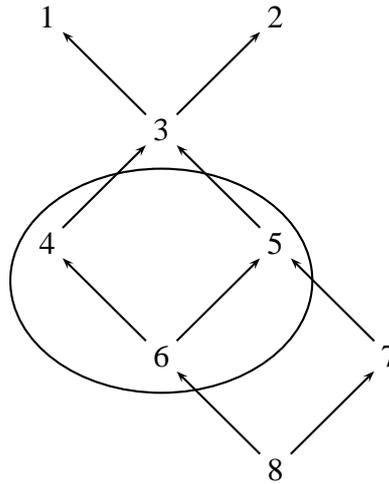
Q. 64. $|$ (relation de divisibilité) est une relation d'ordre partiel dans \mathbb{N} . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 65. L'égalité de deux entiers est une relation d'équivalence. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 66. Les relations d'équivalence sont les relations réflexive, symétrique et transitive. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 67. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite réflexive quand tout élément est en relation avec lui-même. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 68. Soit $W = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$ et un sous-ensemble $V = \{4, 5, 6\}$ de W . W est ordonné comme ci-dessous où $X \rightarrow Y$ si X est inférieur à Y :



$\{1,2,3\}$ est l'ensemble des majorants de V . Vrai ou Faux ?

Q. 69. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive si, lorsque x est en relation avec y , alors y est en relation avec x . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 70. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite symétrique si $\forall x \in E, x\mathcal{R}x$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 71. \leq est une relation d'ordre partiel dans \mathbb{R} . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 72. Soit t_1 et t_2 deux termes exprimés dans une algèbre de Boole munie des opérateurs classiques $+$, \cdot et $-$. Si $t_1 + t_2 = 1$ alors $t_1 = 1$ et t_2 a une valeur quelconque, et vice versa. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 73. $\sin : \mathbb{R} \longrightarrow [-1, 1]$ est surjective. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 74. On appelle élément maximum de A un élément de A qui est majorant de A . L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

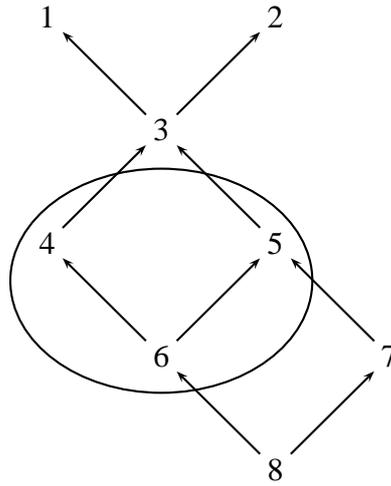
Q. 75. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite symétrique si, lorsque x est en relation avec y , alors y ne peut pas être en relation avec x (sauf si $x = y$). L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 76. Une application bijective est surjective. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 77. Soit \mathcal{R} une relation binaire définie sur un ensemble E , de graphe G . \mathcal{R} est dite transitive si, lorsque x est en relation avec y , alors y ne peut pas être en relation avec x (sauf si $x = y$). L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

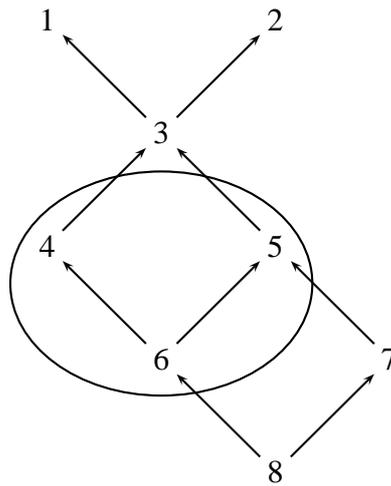
Q. 78. Soit une relation d'ordre sur E , de graphe G . Cette relation d'ordre est dite totale si $\forall x, y \in E, (x, y) \in G$ ou $(y, x) \in G$. L'assertion proposée est vraie ou fausse ?

Q. 79. Soit $W = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$ et un sous-ensemble $V = \{4, 5, 6\}$ de W . W est ordonné comme ci-dessous où $X \rightarrow Y$ si X est inférieur à Y :



Les éléments 6 et 8 sont les minorants de V . Vrai ou Faux ?

Q. 80. Soit $W = \{1, 2, 3, \dots, 7, 8\}$ et un sous-ensemble $V = \{4, 5, 6\}$ de W . W est ordonné comme ci-dessous où $X \rightarrow Y$ si X est inférieur à Y :



L'élément 8 est le seul minorant de V . Vrai ou Faux ?